

Xalq ta'limi vazirligi Fan olimpiadalari bo'yicha iqtidorli o'quvchilar bilan ishlash departamentining matematika fanidan haftalik topshiriqlarining yechimlari

10 – 11 sinf o'quvchilari uchun

1 – masala. Aytaylik $a + b + c + d = S$ va $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = S$ ekanligidan (bu yerda $abcd \neq 0$) $\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{d-1} = S$ kelib chiqsin. U holda S ning qiymatini toping.

Yechimi: Dastlabki ikkita shartdan ko'rishimiz mumkinki,

$$(a, b, c, d) \text{ va } \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}\right)$$

to'rtliklar masala shartini bir vaqtda qanoatlantiradi. U holda

$$\frac{1}{\frac{1}{a}-1} + \frac{1}{\frac{1}{b}-1} + \frac{1}{\frac{1}{c}-1} + \frac{1}{\frac{1}{d}-1} = S$$

tenglik ham o'rinli. Masalada berilgan

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{d-1} = S$$

tenglikni ham inobatga olib, ularni qo'shib,

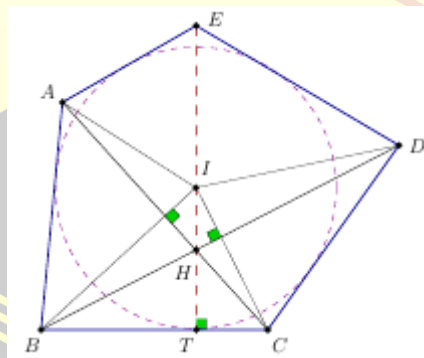
$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{\frac{1}{a}-1} = -1$$

tenglikdan $-4 = 2S$ natijani olamiz, ya'ni $S = -2$ ekan.

Javob: $S = -2$

2 – masala. Berilgan qavariq $ABCDE$ beshburchak uchun $AB = BC = CD$, $\angle EAB = \angle BCD$ va $\angle EDC = \angle CBA$ shartlar o‘rinli. Aytaylik E nuqtadan BC to‘g‘ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyar to‘g‘ri chiziq ℓ bo‘lsin. U holda AC , BD va ℓ to‘g‘ri chiziqlar bitta nuqtada kesishishini isbotlang.

Yechimi: Aytaylik AC va BD kesmalarning o‘rta perpendikulyarlari (ular mos ravishda B va C nuqtalardan o‘tadi) I nuqtada kesishsin. $BD \perp CI$ va $AC \perp BI$ munosabatlarga ko‘ra, $AC \cap BD = H$ – nuqta $\triangle BIC$ ning ortomarkazi bo‘ladi va $IH \perp BC$ shart o‘rinli. Demak $E \in IH$ yoki $EI \perp BC$ munosabatni isbotlash yetarli.



$IA = IC$, $IB = ID$ va $AB = BC = CD$ tengliklarga ko‘ra $\triangle IAB$, $\triangle ICB$ va $\triangle ICD$ uchburchaklar teng uchburchaklar ekanligi kelib chiqadi. U holda

$$\angle IAB = \angle ICB = \frac{\angle C}{2} = \frac{\angle A}{2}$$

ya‘ni IA to‘g‘ri chiziq $\angle A$ burchakning bissekrissasi ekan. Xuddi shunday ID to‘g‘ri chiziq $\angle D$ burchakning bissekrissasi ekanligini ko‘rsatishimiz mumkin. I nuqta beshburchakning to‘rtta burchagining bissekrissasida yotishidan IE to‘g‘ri chiziq $\angle E$ burchakning bissekrissasi ekanligi kelib chiqadi. U holda

$$\angle E = 540^\circ - 2\angle A - 2\angle B$$

bo‘ladi. $ABIE$ to‘rtburchakdan:

$$\angle BIE = 360^\circ - \angle EAB - \angle ABI - \angle AEI = 360^\circ - \angle A - \frac{1}{2}\angle B - \frac{1}{2}\angle E =$$

$$360^\circ - \angle A - \frac{1}{2}\angle B - (270^\circ - \angle A - \angle B) = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle B = 90^\circ + \angle IBC$$

ya'ni, $EI \perp BC$ ekan. Masala to'liq isbotlandi.

3 – masala. $ABCD$ qavariq to'rtburchakda $AB + CD = \sqrt{2}AC$ va $BC + DA = \sqrt{2}BD$ tengliklar bajariladi. U holda $ABCD$ parallelogram ekanligini isbotlang.

Yechimi: A' , B' va D' nuqtalarni quyidagicha aniqlaylik:

A nuqtaning C nuqtaga nisbatan simmetrigi A' nuqta;

B nuqtaning CD tomon o'rtasiga nisbatan simmetrigi B' nuqta;

D nuqtaning BC tomon o'rtasiga nisbatan simmetrigi D' nuqta.

Nuqtalar olinishiga ko'ra C nuqta AA' kesmaning o'rtasi. Qolaversa

$$CD' = BD = B'C$$

tengliklarga ko'ra C nuqta $B'D'$ kesmaning ham o'rtasi ekanligi, ya'ni $AB'A'D'$ to'rtburchak parallelogram ekan. Topilgan natijalar va uchburchak tengsizligiga ko'ra

$$\sqrt{2} \cdot AC = AB + CD = AB + BD' \geq AD'$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Xuddi shu usulda

$$\sqrt{2} \cdot BD = BC + DA = DB' + DA \geq AB'$$

tengsizlik topamiz. Topilgan tengsizliklarni kvadratga oshirib, so'ng ularni qo'shib yuboramiz:

$$2(AC^2 + BD^2) \geq AD'^2 + AB'^2 \quad (*)$$

Boshqa tomondan $AB'A'D'$ parallelogramning diogonallari uzunliklarini

$$AA' = 2 \cdot AC$$

va

$$B'D' = 2 \cdot CD' = 2 \cdot BD$$

bo'lib:

$$(2 \cdot AC)^2 + (2 \cdot BD)^2 = AA'^2 + B'D'^2 = 2(AB'^2 + AD'^2)$$

Demak (*) ga ko'ra yuqorida qo'llagan barcha tengsizliklar tenglik bo'lishi kerak, ya'ni $B \in AD'$ va $D \in AB'$ bo'lishi zarur va yetarli. $BD' \parallel CD$ ekanligidan $AB \parallel CD$ ni topamiz. Xuddi shuningdek $AD \parallel BC$ ekanligini ko'rsatishimiz mumkin.

4 – masala. Aytaylik $n > 1$ natural son va p tub son uchun $n|p-1$ va $p|n^3-1$ shartlar o‘rinli bo‘lsin. U holda $4p-3$ to‘la kvadrat bo‘lishini isbotlang.

Yechimi: $n|p-1$ ga ko‘ra $p > n-1$ bo‘ladi. U holda

$$p|n^3-1 = (n-1)(n^2+n+1) \Rightarrow p|n^2+n+1$$

bo‘ladi, ya‘ni qandaydir k natural son mavjud bo‘lib $pk = n^2+n+1$ bo‘ladi.

Boshqa tomondan

$$p \equiv 1 \pmod{n} \Rightarrow pk \equiv k \pmod{n}$$

bo‘ladi, ya‘ni

$$pk = n^2+n+1 \equiv k \pmod{n}$$

munosabatlarga ko‘ra

$$p = an+1 \text{ va } k = bn+1$$

bo‘ladigan $a > 0, b \geq 0$ butun sonlar topiladi. U holda

$$(an+1)(bn+1) = n^2+n+1$$

yoki

$$abn^2 + (a+b)n + 1 = n^2 + n + 1.$$

Agar $b \geq 1$ bo‘lsa,

$$abn^2 + (a+b)n + 1 \geq n^2 + 2n + 1 > n^2 + n + 1$$

bo‘ladi. Demak $b=0, a=n+1$ va $p = n^2+n+1$. Shuning uchun $4p-3 = (2n+1)^2$.

5 – masala. Barcha (p, q) tub sonlar juftligini topingki, bunda $p > q$ va quyidagi ifoda butun son bo‘lsin:

$$\frac{(p+q)^{p+q} \cdot (p-q)^{p-q} - 1}{(p+q)^{p-q} \cdot (p-q)^{p+q} - 1}$$

Yechimi: Aytaylik $M = (p+q)^{p-q}(p-q)^{p+q} - 1$ bo‘lsin. Ravshanki,

$$EKUB(M, p-q) = EKUB(M, p+q) = 1$$

Bilamizki $\exists c \in \mathbb{Z}$ bunda

$$c(p - q) \equiv 1 \pmod{M}$$

taqqoslama o'rinli. U holda

$$(p + q)^{p+q}(p - q)^{p-q} - 1 \equiv (p + q)^{p-q}(p - q)^{p+q} - 1 \pmod{M}$$

$$(p + q)^{p+q}(p - q)^{p-q} \equiv (p + q)^{p-q}(p - q)^{p+q} \pmod{M}$$

$$(p + q)^{2q} \equiv (p - q)^{2q} \pmod{M} \quad (1)$$

$$(c(p + q))^{2q} \equiv 1 \pmod{M} \quad (2)$$

1 – hol: $q \geq 5$ bo'lsin. M ning ixtiyoriy tub bo'luvchisi r ni olaylik. M toqligiga ko'ra, $r \geq 3$. (2) ga ko'ra $(c(p + q))$ ning $(\text{mod } r)$ bo'yicha orderi (tartibi) $2q$ ning bo'luvchisi. Demak u $\{1, 2, q, 2q\}$ sonlaridan biri bo'la oladi. Ferma teoremasiga ko'ra u $r - 1$ ning bo'luvchisi bo'ladi. Bundan order q yoki $2q$ bo'lsa, $r \equiv 1 \pmod{q}$. Agar order 1 yoki 2 bo'lsa, u holda

$$r \mid (p + q)^2 - (p - q)^2 = 4pq$$

ya'ni $r = p$ yoki $r = q$. Birinchi hol bo'lishi mumkin emas, chunki, Ferma teoremasiga ko'ra

$$M = (p + q)^{p-q}(p - q)^{p+q} - 1 \equiv q^{p-q}(-q)^{p+q} = (q^2)^p - 1 = (q + 1)(q - 1) \pmod{p}$$

va $q \pm 1$ larning ikkisi ham p dan kichik, ya'ni M soni p ga bo'linmaydi. Demak M ning ixtiyoriy tub bo'luvchisi q yoki $kq + 1$ ko'rinishida bo'lib, ular $(\text{mod } q)$ bo'yicha 0 yoki 1 bilan taqqoslanadi. Qolaversa,

$$M = \left((p + q)^{\frac{p-q}{2}} (p - q)^{\frac{p+q}{2}} - 1 \right) \left((p + q)^{\frac{p-q}{2}} (p - q)^{\frac{p+q}{2}} + 1 \right)$$

ya'ni u ikkita ketma – ket kelgan toq natural sonning ko'paytmasidan iborat bo'lib, ularning har biri $(\text{mod } q)$ bo'yicha 0 yoki 1 bilan taqqoslanishi kerak. Lekin bu $q \geq 5$ da ziddiyat.

2 – hol: $q = 2$ bo'lsin. (1) ga ko'ra,

$$M \mid (p+q)^{2q} - (p-q)^{2q} = (p+2)^4 - (p-2)^4$$

bo'ladi. Bundan

$$(p+q)^{p-q}(p-q)^{p+q} - 1 = M \leq (p+2)^4 - (p-2)^4 \leq (p+2)^4 - 1$$

yoki

$$(p+2)^{p-6}(p-2)^{p+2} \leq 1$$

Agar $p \geq 7$ bo'lsa, chap tomon aniq 1 dan katta. $p = 5$ bo'lsa

$$(p+2)^{p-6}(p-2)^{p+2} = 7^{-1} \cdot 3^7$$

bo'lib, u ham 1 dan katta. Demak faqatgina $p = 3$ ni tekshirish qoldi xolos:

$$\frac{(p+q)^{p+q}(p-q)^{p-q} - 1}{(p+q)^{p-q}(p-q)^{p+q} - 1} = \frac{5^5 \cdot 1^1 - 1}{5^1 \cdot 1^5 - 1} = \frac{3124}{4} = 781$$

Demak 2 – hol da $(p, q) = (3, 2)$ juftlik yagona yechim ekan.

3 – hol: $q = 2$ bo'lsin. 2 – hol ga ko'ra,

$$M \mid (p+q)^{2q} - (p-q)^{2q} = 64 \cdot \left(\left(\frac{p+3}{2} \right)^6 - \left(\frac{p-3}{2} \right)^6 \right).$$

M ning toq ekanligidan,

$$M \mid \left(\frac{p+3}{2} \right)^6 - \left(\frac{p-3}{2} \right)^6$$

va

$$(p+3)^{p-3}(p-3)^{p+3} - 1 = M \leq \left(\frac{p+3}{2} \right)^6 - \left(\frac{p-3}{2} \right)^6 \leq \left(\frac{p+3}{2} \right)^6 - 1$$

yoki

$$64(p+3)^{p-9}(p-3)^{p+3} \leq 1$$

Agar $p \geq 11$ bo'lsa o'ng tomon 1 dan katta bo'ladi. Agar $p = 7$ bo'lsa, u holda

$$64(p+3)^{p-9}(p-3)^{p+3} = 64 \cdot 10^{-2} \cdot 4^{10} > 1$$

bo'ladi. Agar $p = 7$ bo'lsa esa

$$64(p+3)^{p-9}(p-3)^{p+3} = 64 \cdot 8^{-4} \cdot 2^8 = 2^2 > 1$$

bo'ladi. Demak 3 – hol da ham yechim yo'q.

Javob: $(p, q) = (3, 2)$

7 – 9 sinf o'quvchilari uchun

1 – masala. $2x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x - 2y + 3$ ko'phad eng kichik qiymatga erishganda, xy ko'paytmaning qiymati qanday bo'ladi?

Yechimi: Masalada berilgan ikki o'zgaruvchili ko'phadni kvadratlar yig'indisi ko'rinishida yozib olamiz:

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 + (x+y)^2 + 1 \geq 1.$$

Tenglik holi $y = -x = 1$ da bajariladi.

Javob: -1

2 – masala. Aytaylik $a^3 = a + 1$ bo'lsin. U holda $\sqrt[3]{3a^2 - 4a} + a^4\sqrt{2a^2 + 3a + 2}$ ifodaning qiymatini toping.

Yechimi: Berilgan $a^3 = a + 1$ shartga ko'ra,

$$3a^2 - 4a = 3a^2 - 3a - (a^3 - 1) = (1-a)^3$$

va

$$2a^2 + 3a + 2 = a^2 + (a+1)^2 + (a+1) = a^2 + a^6 + a^3 =$$

$$a^2(1+a+a^4) = a^2(a^3+a^4) = a^5(1+a) = a^8$$

Tengliklarni topamiz. U holda

$$\sqrt[3]{3a^2 - 4a} + a^4\sqrt{2a^2 + 3a + 2} = 1 - a + a^4\sqrt{a^8} = 1 - a + a^3 = 2.$$

3 – masala. Aytaylik a, b va c sonlari qandaydir uchburchak tomonlari uzunliklari bo'lsin. U holda quyidagi tengsizlikni isbotlang:

$$(a + b)\sqrt{ab} + (a + c)\sqrt{ac} + (b + c)\sqrt{bc} > a^2 + b^2 + c^2$$

Yechimi: O'rta arifmetik va o'rta geometrik qiymatlar haqidagi tengsizlikka ko'ra quyidagilarni topamiz:

$$(a + b)\sqrt{ab} + (a + c)\sqrt{ac} + (b + c)\sqrt{bc} > 2\left((\sqrt{ab})^2 + (\sqrt{ac})^2 + (\sqrt{bc})^2\right) = 2(ab + bc + ca)$$

Demak

$$2(ab + bc + ca) > a^2 + b^2 + c^2$$

tengsizlikni isbotlashimiz kerak ekan. Uchburchak tengsizligidan foydalanib,

$$ab + bc = b(a + c) > b^2$$

$$ac + bc = c(a + b) > c^2$$

$$ab + ac = a(b + c) > a^2$$

Ularni qo'shib yuborsak natijaga kelamiz. Masala to'liq isbotlandi.

4 – masala. $1^2 \cdot 2! + 2^2 \cdot 3! + \dots + 2019^2 \cdot 2020! - 2018 \cdot 2021!$ yig'indini hisoblang.

Yechimi: Quyidagi ayniyatni qaraylik:

$$k^2(k + 1)! = (k + 2)(k - 1)(k + 1)! - (k + 1)(k - 2)k!$$

U holda masalada so'ralgan yig'indi quyidagicha topiladi:

$$n^2(n + 1)! = (n + 2)(n - 1)(n + 1)! - (n + 1)(n - 2)n!$$

$$(n - 1)^2 \cdot n! = (n + 1)(n - 2) \cdot n! - n(n - 3) \cdot (n - 1)!$$

.....

$$1^2 \cdot 2! = (1 + 2)(1 - 1) \cdot (1 + 1)! - (1 + 1)(1 - 2) \cdot 1!$$

Bundan

$$1^2 \cdot 2! + 2^2 \cdot 3! + \dots + k^2 \cdot (k + 1)! = (k + 2)(k - 1)(k + 1)! + 2 = (k - 1)(k + 2)! + 2$$

Agar $k = 2019$ deb tanlasak

$$1^2 \cdot 2! + 2^2 \cdot 3! + \dots + 2019^2 \cdot 2020! - 2018 \cdot 2021! = 2$$

ekanligi kelib chiqadi.

Javob: 2

5 – masala. Aytaylik $p - 10$, p , $p + 10$ sonlarning har biri tub son bo'lsin. U holda $p - 2$ ham tub son ekanligini isbotlang.

Yechimi: Aytaylik $p - 10 \neq 3$ bo'lsin. U holda p ni 3 ga bo'lganda 0 yoki 2 qoldiq qoladi, ya'ni p yoki $p + 10$ tub son 3 ga bo'linib qoladi. Bu ularning tub ekanligiga zid. Demak $p - 10 = 3$, ya'ni $p = 13$. U holda $p - 2 = 11$ tub son. Isbot tugadi.

4 – 6 sinf o'quvchilari uchun

1. Avtomobilning tezligi 70 km/soat. Avtomobil harakat davomida 2870 km bosib o'tishi kerak. Avtomobil 14 soat yo'l yurib to'xtagan bo'lsa, yana qancha masofa qolgan?

- A) 1890 B) 1980 C) 1840 D) 1910

2. 1 dan 80 gacha bo'lgan sonlar oralig'ida jami nechta 7 soni qatnashgan?

- A) 12 ta B) 19 ta C) 18 ta D) 16 ta

3. Bir olma daraxtidan 30 kg, ikkinchisidan esa 1-siga qaraganda 18 kg ko'p, va 3-daraxtdan 2-siga qaraganda 2 marta kam olma terildi. Hamma olmalarni 6 kg dan qilib yashiklarga joylash uchun nechta yashik kerak bo'ladi?

- A) 15 ta B) 17 ta C) 16 ta D) 19 ta

4. Samandarning oilasining hovlisi tomonlari 14 m va 17 m bo'lgan to'g'ri to'rtburchak shaklida. U karantin vaqtida badantarbiya qilib, har kuni hovlisining atrofini 5 marta aylanib chiqadi. Samandar kuniga necha metr yuguradi?

- A) 300 m B) 350 m C) 310 m D) 320 m

5. Toshbaqa ertalab 23 metrli chuqurlikka tushib ketdi. Har kuni kunduzi 5 metrga ko'tariladi, kechasi esa 2 metrga sirg'alib pastga tushadi. Toshbaqa necha kunda chuqurlikdan chiqadi?

- A) 7 kunda B) 9 kunda C) 6 kunda D) 8 kunda

6. 81 dan kichik bo'lmagan barcha ikki xonali sonlar yig'indisi qanday raqam bilan tugaydi?

- A) 0 B) 1 C) 5 D) 9

7. $3\text{ m } 9\text{ dm} - 105\text{ sm}$ ifodani mm larda ifodalang?

- A) 285 B) 258 C) 2580 D) 2850

8. **A** va **B** shaharlari orasidagi masofa 240 km , bir avtomobil **A** shahardan **B** shaharga tomon 40 km/soat tezlik bilan yo'lga chiqdi, ma'lum vaqt yurib bekatda to'xtadi va yana yo'lga chiqib 2 soatda **B** shaharga yetib keldi. Hisoblab chiqilsa avtomobil jami 8 soat da manzilga yetib kelgan ekan. Avtomobil bekatda necha soat to'xtab turgan.

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

9. Maktab ustaxonasi uchun oldin 15 ta, keyin 8 ta bolg'acha olindi. Keyingi safar avvalgisidan 1120 so'm kam pul to'landi. Bitta bolg'acha qancha turadi?

- A) 160 B) 170 C) 180 D) 140

10. Bog'da ertalab $x\text{ kg}$, tushda $5 \times x$, tushdan keyin esa 132 kg olma terildi. Terilgan olmalar 12 kg dan qilib x ta qutilarga joylandi. x ni toping.

- A) 24 B) 26 C) 22 D) 20

11. Ertalab do'konga 5 tonna un keltirildi. Unni 100 ta qopga solib chiqishdi. Tushgacha 12 qop un sotildi. Tushdan keyin yana 3 sentener un keltirildi. Kechgacha yana 16 qop un sotildi. Qancha un qoldi? (*sentenerlarda ifodalang*)

- A) 3,9 tonna B) 39 sentener C) 40 sentener D) 35 sentener

12. $8\text{ soat } 50\text{ minut } 13\text{ sekund} + 5\text{ soat } 40\text{ minut } 47\text{ sekund} = ?$

(*Javobni sekundlarda ifodalang*)

- A) 871 minut B) 52360 sekund C) 52260 sekund D) 53260 sekund

13. Akbar 2 ta daftarni 1300 so‘mga oldi. Ali esa 3 ta daftar va 5 ta ruchkani 4450 so‘mga oldi. Zoir 2 daftar va 3 ruchkani qanchaga olgan?

- A) 1900 so‘m B) 2400 so‘m C) 1500 so‘m D) 2800 so‘m

14. Kosmonavtlar Oyga uchishmoqchi. Hisoblab ko‘rishsa, raketada Yer vaqti bilan 10 kunda Oyga yetish mumkin ekan. Agar osmondagi har bir soat yerdagi har bir soatdan 2 marta sekinroq o‘tsa, Oyda Yer vaqti bilan 4 kun bo‘lib qaytish uchun qancha davr kerak bo‘ladi? (Osmon vaqtini davr deb ataymiz)

- A) 12 davr B) 24 davr C) 14 davr D) 22 davr

15. Akalarning yoshlari yig‘indisi ukalarning yoshlari yig‘indisidan 6 yilga katta, ota farzandlari yoshlari yig‘indisidan 3 marta katta. Agar eng katta insonning yoshi 42 da bo‘lsa, eng kichik farzandning yoshini toping. (Bu yerda Akalar 2 ta, ukalar 2 ta, ota 1 ta)

- A) 4 yoki 3 B) 1 yoki 2 C) 2 yoki 3 D) 2 yoki 4

Test topshiriqlarining javoblari

1. A	6. A	11. B
2. C	7. D	12. C
3. B	8. C	13. D
4. C	9. A	14. A
5. A	10. C	15. B

**Fan olimpiadalari bo‘yicha iqtidorli o‘quvchilar bilan
ishlash departamenti sizga omadlar tilaydi!**